|  |  |
| --- | --- |
|  | **2015** |
|  | ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΤΣΟΡΤΑΝΙΔΗΣ |

|  |
| --- |
| **[ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ]** |
| ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ |

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ**

**ΘΕΜΑ 1**

Δίνεται η συνάρτηση f: ℜ→ℜ που έχει την ιδιότητα

f(f(x) - 2) = x

για κάθε x∈ℜ.

**A.** Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

**Β.** Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το IR.

**Γ.** Να βρείτε τον τύπο της f -1 ως συνάρτηση της f.

**Δ.** Να αποδείξετε ότι f(x) = f(x + 2) – 2, για κάθε x∈ℜ.

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x3 + 8x - 8.

**A.** Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

**Β.** Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

**Γ.** Να βρείτε, αν ορίζεται, το f -1(-8)

**Δ.** Nα λύσετε την ανίσωση f -1(x)  1

**Ε.** Nα λύσετε την ανίσωση f(f(x))  1

**ΘΕΜΑ 3**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) =x3 + x - 1

**Α.** Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

**Β.** Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

**Γ.** Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της ƒ τέμνει την γραφική παράσταση της f-1 .

**Δ.** Να λύσετε την ανίσωση f-1(3x + 2) > 1

**ΘΕΜΑ 4**

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει f3(x) + f(x) + x = 0 για κάθε xR.

**Α.** Να αποδειχθεί ότι η f είναι “1-1”

**Β.** Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f-1

**Γ.** Να λυθεί η εξίσωση f-1(x3 + x2) = f-1(3 + 3x)

**ΘΕΜΑ 5**

Έστω συνάρτηση f: ℜ→ℜ, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

f(x + y) = f(x) + f(y) – 8 και f(x)f(y) = 5f(xy) + 8f(x) + 8f(y) - 104

**Α.** Ποια σταθερή συνάρτηση ικανοποιεί τις σχέσεις αυτές;

**Β.** Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή για κάθε x∈ℜ.

**i)** Να υπολογίσετε τις τιμές f(0) και f(1) .

**ii)** Να βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση πρώτου βαθμού που ικανοποιεί τις σχέσεις αυτές.

**ΘΕΜΑ 6**

Μια συνάρτηση f: ℜ→ℜ έχει την ιδιότητα

f(xψ) = f(x) + f(ψ)

για κάθε x,y∈ℜ\*. Να δειχθεί ότι:

**A.** f(1) = 0

**B.** Για κάθε x ισχύει f() = -f(x)

**Γ.** Για κάθε x, ψ ισχύει f() = f(x) – f(y)

**Δ.** Αν για κάθε x ισχύει xν = α (ν∈Ν) τότε f(α) = ν f(x)

**Ε.** f(-1) = 0

**Ζ.** Για κάθε x ισχύει f(-x) = f(x).

**ΘΕΜΑ 7**

Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση f : IRIR.

Αν τα σημεία Α(1, 2) και Β( -1, 3) βρίσκονται στη γραφική παράσταση της f :

**A.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

**B.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

**Γ.** Να βρείτε το λIR ώστε f -1( 2 + f -1 ( eλ-1 ) ) = -1.

**ΘΕΜΑ 8**

Έστω f(x) = x + lnx.

**Α.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

**Β.** Να βρείτε την τιμή f-1(e+1).

**Γ.** Να βρείτε τις τιμές του αIR ώστε ln= 4 – α2.

**ΘΕΜΑ 9**

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι μία γνησίως μονότονη στο R και η γραφική παράστασή της διέρχεται από τα σημεία Α(1,5) και Β(5,-2).

**Α.** Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

**Β.** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση fof είναι γνησίως αύξουσα

**Γ.** Να λύσετε την ανίσωση f(f(ex)) < -2

**ΘΕΜΑ 10**

Έστω η συνάρτηση f:  για την οποία ισχύει f(f(x)) = x για κάθε x και η συνάρτηση

g(x) = x + f(x), x

η οποία είναι 1 – 1.

**Α.** Να δειχθεί ότι η f είναι 1 – 1

**Β.** Να δειχθεί ότι η g(f(x)) = g(x) για κάθε x

**Γ.** Να βρείτε τη συνάρτηση f.

**ΘΕΜΑ 11**

Έστω οι συναρτήσεις f, g: . Η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα.

**Α.** Να δειχθεί ότι η fog είναι γνησίως φθίνουσα.

**Β.** Να λύσετε την ανίσωση f(g(ex-x)) = f(g(1-x))..

**Γ.** Να λύσετε την εξίσωση f(g(x2-1)) = f(g(3x+1)).

**ΘΕΜΑ 12**

Έστω η συνάρτηση f:  η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(3,-2).

**Α.** Να συμπληρώσετε τις ισότητες f(1) = …….. f(3) = ………

**Β.** Να βρείτε τη μονοτονία της f

**Γ.** Να λύσετε την ανισότητα f(3x – 1) + 2 < 0

**Δ.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

**Ε.** Να λύσετε την εξίσωση f(ex-1) = 2

**ΣΤ.** Να συμπληρώσετε τις ισότητες f-1(2) = ……… και f-1(-2) = ……….

**Ζ.** Να λύσετε την εξίσωση f(-2 + f-1(x + 2)) = 2

**ΘΕΜΑ 13**

Αν f(x + y) = f(x) + f(y) για κάθε x,y να αποδείξετε ότι:  
**Α1.** f(0) = 0  
**Α2.** η συνάρτηση f είναι περιττή  
**Α3.** f(x – y) = f(x) – f(y) με x,y  
**Β1.** Να αποδείξετε ότι f(vx) = vf(x) για   
**Β2.** Υπολογίστε την τιμή της παράστασης



**Β3.** Αν η f είναι 1-1, να λύσετε την εξίσωση

2f(x) = f(1) + f(3) + f(6)

**ΘΕΜΑ 14**

Έστω η ορισμένη στο Αf = (0, +) συνάρτηση f και η ορισμένη στο Ag = R συνάρτηση g(x) = 1 – x.

**Α.** Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο Κ του R που ορίζεται η fog.  
**B.** Aν (fog)(x) = x να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι f(x) = 1 – x.  
**Γ.** Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο οι f, g γίνονται ίσες.  
**Δ.** Να ορίσετε τις συναρτήσεις f - g και gof.

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Ο Ρ Ι Α – Σ Υ Ν Ε Χ Ε Ι Α Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ω Ν**

**ΘΕΜΑ 1**

Δίνεται η συνάρτηση f:  για την οποία ισχύουν :

i) είναι συνεχής στο R

ii) xf(x) + συνx = 1 – x2ημ, x  0

**Α.** Να υπολογίσετε το 

**Β.** Να βρείτε τον τύπο της f

**Γ.** Να βρείτε τα όρια  και 

**Δ.** Δείξτε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

**ΘΕΜΑ 2**

Για μία συνάρτηση f δεχόμαστε ότι :

(fof)(x) = 3x + 2για κάθε x

**Α.** Να δειχθεί ότι η f είναι ΄΄1-1΄΄.

**Β.** Το σύνολο τιμών της f είναι το R.

**Γ.** Να επιλυθεί η εξίσωση 9f(x) + 8 = f-1(53)

**ΘΕΜΑ 3**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύουν

f(f(x)) - f(x) = 3 και f(1) = 4

**Α.** Να υπολογίσετε το όριο

.

**Β.** Αν , να δειχθεί ότι η Cf διέρχεται από το σημείο με τεταγμένη 6 .

**Γ.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

g(x) = x f(x) – 30 συν(πx)

Να δειχθεί ότι η Cg τέμνει τον x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο (4,7).

**Δ.** Να δειχθεί ότι υπάρχει xo(1,7) τέτοιο ώστε να ισχύει

10f(xo) = 2f(2) + 3f(3) + 5f(5)

**ΘΕΜΑ 4**

Έστω η συνάρτηση

f(x)=  α, βR

**Α.** Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η f να είναι συνεχής στο xo=1.

**Β.** Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής και

, 

**i)** Nα δειχθεί ότι α=-3 και β=8

**ii)** Να βρείτε τη συνάρτηση

h(x) = f(x) + g(x), όπου g(x) = ln(x - 1)

**iii)** Να δειχθεί ότι η Ch τέμνει τον x’x σε ένα τουλάχιστον σημείο

**iv)** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση Φ(x) = (f(x))2009 και η ευθεία y=κ, κ, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο για κάθε κ.

**ΘΕΜΑ 5**

Δίνεται η συνάρτηση

f(x) = 

**Α.** Να βρεθεί το αR ώστε η f να είναι συνεχής στο xo=0

**Β.** Να βρεθεί το .

**Γ.** Να δειχθεί ότι η εξίσωση (f(x))2009 = κ έχει μία τουλάχιστον ρίζα για κάθε κR

**ΘΕΜΑ 6**

Δίνεται η συνάρτηση f:  για την οποία ισχύει

 για κάθε x,yR με x  y.

**Α.** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R.

**Β.** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g(x) = x – f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R .

**Γ.** Να λυθεί η εξίσωση f(2x3) – f(3 – x2) = 2x3 + x2 – 3

**ΘΕΜΑ 7**

Έστω f: RR μία συνεχής περιττή συνάρτηση τέτοια ώστε  .

**Α.** Να δειχθεί ότι  .

**Β.** Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ;

**Γ.** Να δειχθεί ότι για κάθε αR , η εξίσωση f(x) = α έχει λύση.

**Δ.** Αν για μία συνάρτηση g: RR , η συνάρτηση gof είναι 1 – 1 .

**i)** Να δειχθεί ότι η f είναι 1 – 1

**ii)** Να δειχθεί ότι η g είναι 1 – 1

**ΘΕΜΑ 8**

Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f ώστε   
**Α.** Να βρείτε την τιμή του ορίου   
**Β.** Έστω τώρα ότι και   
**Β1.** Να αποδείξετε ότι =1  
**Β2.** Αν f(x)  xg(x) + 1  x2 + x + 1 για κάθε x  0,αποδείξτε ότι .

**ΘΕΜΑ 9**

Δίνεται η συνάρτηση  με την ιδιότητα:  
**Α.** Αν η εξίσωση  έχει μοναδική ρίζα το 1 να δείξετε ότι η f είναι 1-1  
**Β.** Αν  να βρείτε το όριο:

**ΘΕΜΑ 10**

Δίνεται η συνάρτηση f: για την οποία ισχύει

f3(x) + f(x) + x = 0 για κάθε x.

**Α.** Να δειχθεί ότι η f είναι 1-1.

**Β.** Να βρεθεί ο τύπος της f -1.

**Γ.** Να λυθεί η εξίσωση f -1(x3-x)=f -1(3-3x).

**ΘΕΜΑ 11**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = ( - α) ημ

**Α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

**Β.** Να βρείτε τα όρια , .

**Γ.** Να βρείτε το 

**Δ.** Αν γνωρίζουμε ότι το  δεν υπάρχει και θέλουμε να ορίσουμε την συνάρτηση και στο 0, με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι συνεχής, να δείξετε ότι πρέπει α = 1 και να βρείτε το f(0).

**ΘΕΜΑ 12**

Έστω η συνάρτηση 

**Α.** Να μελετηθεί η f ως προς τη συνέχεια στα διαστήματα (-,2) και (2,+ ).

**Β.** Να βρείτε το 

**Γ.** Να βρείτε τον α ώστε η f να είναι συνεχής στο 2

**Δ.** Για την τιμή του που βρήκατε στο Γ), να βρείτε το 

**ΘΕΜΑ 13**

Δίνεται η συνάρτηση  για την οποία ισχύει:

f(1 - lnx) = 1 – x - lnx, x > 0

**Α.** Να δείξετε ότι: f(x) = x – e1-x για κάθε x.

**Β.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο .

**Γ.** Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης.

**Δ.** Να υπολογίσετε τα όρια , .

**ΘΕΜΑ 14**

Δίνεται η συνάρτηση  για την οποία ισχύει η σχέση

f(x y) = xf(y) + yf(x) για κάθε x,y(0, +).

Δείξτε ότι

**Α.** f(1) = 0

**Β.** Αν f συνεχής στο 1, τότε η f συνεχής στο 

**Γ.** Αν f συνεχής στο 1, είναι η f παραγωγίσιμη;

**ΘΕΜΑ 15**

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

f3(x) + f(x) = 8x3 για κάθε x

**A.** Να αποδείξετε ότι: 0 < f(x) < 2x για κάθε x > 0

**B.** Να βρείτε το όριο   
**Γ.** Να βρείτε το όριο 

**ΘΕΜΑ 16**

Δίνεται η συνάρτηση:



**Α.** Να βρείτε τα α και β έτσι, ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.  
**Β.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει α=1 και β=0, τότε:  
**i)** να υπολογίσετε το 

**ii)** να υπολογίσετε τα όρια  και 

**ΘΕΜΑ 17**

Έστω f:  συνάρτηση τέτοια ώστε

 = 3

**Α.** Να αποδείξετε ότι για κάθε m 0 ισχύει

 = 3m

**Β.** Αν για κάθε x ισχύει:

f2(mx) + ημ2x  2f(mx) ημx

να δείξετε ότι m = 

**ΘΕΜΑ 18**

Έστω η συνεχής στο R συνάρτηση, τέτοια ώστε να ισχύει για κάθε χ στο R,

xf(x) – 5x4 – x + 2ημx2 = 0

**A.** Να βρείτε τον τύπο της f

**B.** Να βρείτε το 

**Γ.** Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

**ΘΕΜΑ 19**

Δίνεται η συνάρτηση f,για την οποία ισχύει:

2f(x) – ημf(x) = x για κάθε 

**Α.** Να αποδείξετε ότι 

**Β.** Να αποδείξετε ότι 

**Γ.** Να υπολογίσετε το 

**Δ.** Να υπολογίσετε το 

**ΘΕΜΑ 20**

Έστω η συνάρτηση f: , για την οποία ισχύει:

(f(x))2 – 2f(x) + συν2x = 0 για κάθε x

**Α.** Να αποδείξετε ότι   
**Β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο xo = 0

**Γ.** Να βρείτε το όριο 

**ΘΕΜΑ 21**

Δίνεται η συνάρτηση f:  με την ιδιότητα:

f(x + y) = f(x) + f(y) για κάθε x,y

**Α.** Να δείξετε ότι f(0) = 0

**Β.** Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

**Γ.** Αν =0 να δείξετε ότι: , α

**Δ.** Αν =2009 να βρείτε το όριο 

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ Σ – Λ**

**ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

1. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

Σ Λ

**2.** , αν και μόνο αν 

Σ Λ

**3.** Αν υπάρχει το όριο της f στο x0, τότε  , εφόσον f(x) ≥ 0 κοντά στο x0, µε kΙΝ και k ≥ 2.

Σ Λ

**4.** Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α) < 0 και υπάρχει ξ(α, β) ώστε f(ξ) = 0, τότε κατ’ ανάγκη f(β) > 0.

Σ Λ

**5.** Αν υπάρχει το , τότε κατ’ ανάγκη υπάρχουν τα  και .

Σ Λ

**6.** Αν =0 και f(x) > 0 κοντά στο x0, τότε = +.

Σ Λ

**7.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα ∆ και δε μηδενίζεται σ’ αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x∆ ή είναι αρνητική για κάθε x∆, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα ∆.

Σ Λ

**8.** Μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο xo ένα πραγματικό αριθμό . Αναγκαστικά το xo ανήκει στο πεδίο ορισμού.

Σ Λ

**9.** Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο xo του πεδίου ορισμού της, αν  με α∈.

Σ Λ

**10.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει  τότε η f δεν είναι συνεχής στο xo.

Σ Λ

**11.**Αν για μια συνάρτηση f ισχύει  και το xo ανήκει στο πεδίο ορισμού της τότε η f είναι συνεχής στο xo.

Σ Λ

**12.** Το όριο μιας συνάρτησης f στο xo εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Σ Λ

**13.** Έστω f συνεχής στο xo τότε .

Σ Λ

**14.** Αν οι f, g δεν είναι συνεχείς στο xo τότε και η συνάρτηση f · g δεν είναι συνεχής στο xo

Σ Λ

**15.** Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ είναι συνεχής και 1 – 1 σ’ αυτό τότε και η συνάρτηση f –1 είναι συνεχής στο f(Δ).

Σ Λ

**16.** Κάθε συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση f με πεδίο ορισμού [α, β] έχει μέγιστο το f(β) και ελάχιστο το f(α).

Σ Λ

**17.** Αν  τότε 

Σ Λ

**18.** Αν f(x) ≥ g(x) κοντά το xo τότε .

Σ Λ

**19.** Αν  τότε 

Σ Λ

**20.** Έστω f συνεχής στο [α, β] και f(x) ≠ 0 για κάθε (α, β). Αν υπάρχει ξ(α, β) τέτοιο ώστε f(ξ) < 0 , τότε f(x) < 0 για κάθε

(α, β).

Σ Λ

**21.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο xo με f(xo) ≠ 0 τότε κοντά στο xo οι τιμές της f είναι ομόσημες του f(xo).

Σ Λ

**22.** Η συνάρτηση f(x) = εφx δεν έχει όριο στο xo=.

Σ Λ

**23.** Αν η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (0, +∞) τότε το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο 

Σ Λ